

Сборник задач по математике

Автор: Оренбурова Д.В., преподаватель ГБОУ СПО «Губернский техникум
м. р. Кошкинский»

Сборник задач по математике. Пособие для самостоятельной подготовки.

Кошки, 2015 г.

Оглавление

§1. Алгебра и начала анализа.....	4
1.1. Выражения и преобразования.....	4
1.1.1. Степень с рациональным показателем.....	4
1.1.2. Степени и корни.....	5
1.1.3. Логарифмические и показательные выражения.....	6
1.1.4. Тригонометрические выражения.....	7
1.2. Уравнения. Системы уравнений.....	8
1.2.1. Логарифмические и показательные уравнения.....	8
1.2.2. Тригонометрические уравнения.....	8
1.2.3. Иррациональные уравнения.....	9
1.2.4. Графическое решение уравнения.....	10
1.3. Неравенства.....	10
1.3.1. Логарифмические и показательные неравенства.....	10
1.3.2. Рациональные неравенства.....	11
1.3.3. Графическое решение неравенств.....	12
1.4. Функции.....	14
1.4.1. Область определения функции.....	14
1.4.2. Множество значений функции.....	15
1.4.3. График функции.....	17
1.4.4. Производная функции, наибольшее и наименьшее значение функции.....	20
1.4.5. Преобразования функции.....	22
§2. Геометрия.....	23
2.1. Планиметрия.....	23
2.1.1. Вписанная и описанная окружность.....	23
2.1.2. Вписанная и описанная окружность, n - угольник.....	23
2.1.3. Треугольник.....	24
2.1.4. Параллелограмм. Квадрат.....	25
2.1.5. Трапеция.....	25
2.1.6. Окружность, касательная, секущая.....	26
2.2. Стереометрия.....	27

2.2.1. Пирамида.	27
2.2.2. Призма. Параллелепипед.	29
2.2.3. Конус.	29
2.2.4. Цилиндр.	29
Ответы к сборнику задач.	30
Литература.	34

§1. Алгебра и начала анализа.

1.1. Выражения и преобразования.

1.1.1. Степень с рациональным показателем.

Упростите выражение.

1. $a^{-1\frac{1}{2}} : a^{-\frac{6}{7}}$.

2. $a^{\frac{1}{4}} : a^{-0,75}$.

3. $a^{-\frac{3}{2}} : a^{\frac{2}{3}}$.

4. $a^{\frac{2}{3}} : a^{0,5}$.

5. $a^{\frac{15}{2}} : a^4$.

6. $\frac{8k^3 \cdot k^{\frac{1}{2}}}{k^{-1\frac{1}{2}}}$.

7. $\frac{5t^{-\frac{1}{2}} \cdot t^{1\frac{1}{2}}}{t^{-1}}$.

8. $\frac{3u^2 \cdot u^{\frac{1}{3}}}{u^{-\frac{2}{3}}}$.

9. $\frac{2t^{\frac{3}{2}} \cdot t}{t^{-\frac{1}{2}}}$.

10. $\frac{\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^{-1} \cdot a^{\frac{1}{4}}}{a^{-3\frac{1}{2}}}$.

Вычислите.

11. $49^{\frac{-6}{4}} = 0,246$.

12. $64^{\frac{-2}{3}} = 17,23$.

13. $\frac{5^{2^3}}{5^{2^2}}$.

14. $0,125^{\frac{2}{3}} = 0,25^{\frac{3}{2}}$.

15. $\left(0,216^{\frac{4}{9}}\right)^{\frac{3}{2}}$.

16. $2 \cdot \left(\frac{\frac{1}{4^{\frac{1}{4}}}}{\frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{3^{-\frac{4}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{1}{2}}$.

17. $\frac{1}{(5 \cdot 4)^{-2}} - \frac{1}{(2 \cdot 10)^{-2}}$.

18. Найдите максимальное из чисел $2^{\frac{3}{4}}, 3^{\frac{2}{3}}, 4^{\frac{1}{4}}$.

19. Представьте выражение $\frac{3^{1,5} \cdot 3^{-4,5}}{3^{-2}}$ в виде степени с основанием 3.

20. Представьте выражение $\frac{5^{-2,6} \cdot 5^{4,8}}{5^{2,2}}$ в виде степени с основанием 5.

1.1.2. Степени и корни.

Вычислите.

1. $\sqrt[3]{0,12} \cdot \sqrt[3]{-1,8}$.

2. $\sqrt[5]{18} \cdot \sqrt[5]{-432}$.

3. $\sqrt[3]{14} \cdot \sqrt[3]{196}$.

4. $\sqrt[4]{6} \cdot \sqrt[4]{216}$.

5. $\sqrt[4]{72} \cdot 18$.

6. $\sqrt[3]{36} \cdot 48$.

7. $\sqrt[4]{108} \cdot 12$.

8. $\sqrt{12} \cdot 108$.

Сократите дробь.

9. $\frac{\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$.

10. $\frac{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{y^2}}$.

11. $\frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{y^2}}$.

12. $\frac{x+y}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}}$.

13. $\frac{\sqrt{y} - \sqrt{x}}{x - 2\sqrt{xy} + y}$.

14. $\frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} + 2\sqrt[3]{xy}}{\sqrt[3]{y^2} - \sqrt[3]{x^2}}$.

15. $\frac{a^{-1} + a - 2}{\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}}$.

16. $\frac{\sqrt[3]{\sqrt{x}} + \sqrt{\sqrt[3]{y}}}{\sqrt[3]{y} + 2\sqrt[6]{yx} + \sqrt[3]{x}}$.

17. $\frac{\left(\sqrt[3]{\sqrt{x}} - \sqrt{\sqrt[3]{y}}\right)\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{xy} + \sqrt[3]{y}\right)}{\sqrt{y} - \sqrt{x}}$.

18. $\frac{\sqrt[3]{\sqrt{x}} - \sqrt{\sqrt[3]{y}}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$.

Упростите выражение.

$$19. \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b^3}}{\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{b}}.$$

$$20. \frac{\sqrt{a^3} \cdot \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt[6]{b}}.$$

$$21. \sqrt{m^5} \cdot \sqrt{m^3} \cdot \sqrt{(-m)^2} \cdot \sqrt{m^4}.$$

$$22. \sqrt{(-\sqrt{72n}) \cdot (-\sqrt{18n^2})}.$$

$$23. \frac{\sqrt{675c^7}}{\sqrt{15c^5}}.$$

$$24. \frac{\sqrt[8]{64} \sqrt{64m^{20}}}{\sqrt[3]{4m^2} \cdot \sqrt[3]{16m^2}}.$$

$$25. \frac{(9m)^{\frac{2}{3}} \cdot m^{-\frac{4}{3}}}{\sqrt[6]{m^5}}.$$

$$26. \frac{\sqrt[5]{2 \sqrt{\frac{1}{n-1}} \sqrt{n^2}}}{15 \sqrt[5]{n} \cdot \sqrt[5]{n-1}}.$$

$$27. \text{Упростите для положительного } a \text{ выражение } \sqrt[4]{\sqrt[4]{7^7} \cdot 3^3 a^4} \cdot \sqrt[4]{3^5 \cdot 7 a^4}.$$

$$28. \text{Упростите для отрицательного } a \text{ выражения}$$

$$\sqrt[8]{(a^3 + (a-3) \cdot a^3 + 2a^3)^{-2}}.$$

1.1.3. Логарифмические и показательные выражения.

$$1. \text{ Найдите значение выражения } \log_2 a^{\frac{1}{2}}, \text{ если } \log_4 a^3 = 9.$$

$$2. \text{ Найдите значение выражения } \log_5 125a, \text{ если } \log_a 5 = \frac{1}{3}.$$

$$3. \text{ Найдите } 2^{\log_2 c}, \text{ если } c = 2^5.$$

$$4. \text{ Найдите } \log_5 \frac{1}{25} a, \text{ если } \log_5 a = 3.$$

$$5. \text{ Найдите значение } \log_2 \frac{a^2}{2}, \text{ если } \log_2 a = 3.$$

$$6. \text{ Найдите значение } \log_{\frac{1}{2}}(3b^{-2}), \text{ если } \log_{\frac{1}{2}} b = 2.$$

$$7. \text{ Найдите } 3^{\log_9 c}, \text{ если } c^4 = 36.$$

$$8. \text{ Найдите } \log(10c) + \log \frac{1}{c}, \text{ если } c^2 = 10^4.$$

$$9. \text{ Найдите значение выражения: } \log_a b^p, \text{ если } -\log_a b = 2.$$

$$10. \text{ Найдите значение выражения: } \ln 10^k, \text{ если } \log e = n.$$

Вычислите.

$$11. \frac{\log 15 - \log 45}{\log 18 - \log 2}.$$

$$12. \frac{\log_3 3 + \log_3 12}{\log_3 12 - \log_3 2}.$$

13. $5^{3+\log_5 2}$.
14. $3^{\log_2 2+3}$.
15. $e^{\ln 7} - 8$.
16. $(2^{\log_2 1} + \log_{0,5} 0,5) \cdot 2^{\log_{0,2} 0,2}$.
17. $\frac{2 \cdot 2^{\log_4 1} + \log_{\sqrt{2}} 9}{\log_8 36 - 2 \log_{8,4} \frac{9}{2}}$.
18. $\frac{\ln 4}{\ln 3} \cdot \log_2 3$.
19. $8,5^{\log_{2,5} 6 - \log_{2,5} 2}$.
20. $\log_6 18 + \log_6 (\log_2 (\log_5 625))$.

1.1.4. Тригонометрические выражения.

Найдите значение выражения

1. $3 \sin^2 3\alpha - 2 \sin(\pi - \alpha) + 3 \cos^2 3\alpha$, при $\alpha = \frac{\pi}{6}$.
2. $\sin^2 \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) + 2 \cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) + \cos^2 \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right)$, при $\alpha = \frac{\pi}{3}$.
3. $\frac{1}{2} \sin^2 \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) - \sin \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right) + \frac{1}{2} \cos^2 \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right)$, при $\alpha = \frac{\pi}{6}$.
4. $\sin^2 \left(\frac{\pi\alpha}{3} \right) - 2 \cos \left(\frac{3\pi}{2} + 2\alpha \right) + \cos^2 \left(\frac{\pi\alpha}{3} \right)$, при $\alpha = \frac{\pi}{6}$.
5. $\cos \alpha \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) + 2 \sin \left(\frac{3}{2}\pi + \alpha \right) - \sin \alpha \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$, при $\alpha = \frac{\pi}{6}$.
6. $\sin \alpha \cdot \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) - 2 \cos(\pi - \alpha) - \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) \cdot \cos \alpha$, при $\alpha = \frac{\pi}{3}$.
7. $\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)} + 2 \operatorname{tg} \alpha$, при $\alpha = \frac{\pi}{2}$.
8. $\frac{1}{2} \cdot \operatorname{tg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg}(\pi - \alpha) \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha \right)$, при $\alpha = \frac{\pi}{3}$.
9. $\sqrt{3} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - 3\pi \right) \cdot \operatorname{ctg}(2\pi + \alpha) \cdot \operatorname{tg} 3\alpha$, при $\alpha = \frac{\pi}{4}$.
10. $\operatorname{tg}(\pi - 2\alpha) \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) \cdot \operatorname{tg} \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right)$, при $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

Упростите выражение.

11. $(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \cdot \sin^2 \alpha$.
12. $\frac{4 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$.
13. $8 \left(\cos^2 \frac{\alpha}{4} - \sin^2 \frac{\alpha}{4} \right) \sin \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{4}$.
14. $\frac{94 \sin x}{94 \operatorname{tg} x} : 2 \cos x$.
15. $(2 \operatorname{tg} x) \cdot (2 \operatorname{ctg} x)$.
16. $5(\operatorname{tg}^2 x) \cdot (\cos^2 x) + 5(\sin^2 x) \cdot (\operatorname{ctg}^2 x) - 10$.

$$17. 1 + \sqrt{\left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1\right) \cdot \operatorname{ctg} \alpha \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}}.$$

$$18. 4\cos^4 \alpha + 8\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 4\sin^4 \alpha.$$

$$19. 2\sin^2 2x + 4 + 2\cos^2 2x.$$

$$20. \frac{1 - \sin^4 \alpha}{\sin^2 \alpha (1 + \sin^2 \alpha)}.$$

$$21. \text{Упростите выражение } 10,5 - 3\sin^2 x, \text{ если } \cos x = -1.$$

$$22. \text{Упростите выражение } 6,8 + 2\cos^2 x, \text{ если } \sin x = \frac{1}{2}.$$

$$23. \text{Упростите выражение } 6\operatorname{tg} x - 1, \text{ если } \operatorname{ctg} x = 3.$$

$$24. \text{Упростите выражение } \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + 0,5, \text{ если } \cos x = \frac{1}{3}.$$

$$25. \text{Упростите выражение } \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{4} + 0,25, \text{ если } \sin x = \frac{1}{4}.$$

1.2. Уравнения. Системы уравнений.

1.2.1. Логарифмические и показательные уравнения.

Найдите сумму корней уравнения.

$$1. \log_3(3(1 - x^2)) = \log_3(3x(x + 1)).$$

$$2. \log_3(1 - x^2) = \log_3(2(x + 1)).$$

$$3. \log_5(1 - x^2) = \log_5(5x(2x + 1)).$$

Найдите произведение корней уравнения.

$$4. \log_4(2x + 1)^2 = 3.$$

$$5. \log_{\sqrt{3}}(x - 2)^4 = 8.$$

$$6. \log_{\frac{1}{2}}(x + 3)^4 = 4.$$

$$7. \log_3(x - 1)^2 = -2.$$

1.2.2. Тригонометрические уравнения.

Решите уравнение.

$$1. \sin x \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) = -\operatorname{ctg}^2 x.$$

$$2. \operatorname{tg} x - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} = 2 - \frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$3. 2\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1.$$

$$4. \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$5. \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\frac{1}{2}.$$

$$6. \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

7. $\operatorname{tg}\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3}.$
8. $2\cos(\pi x - \pi) = \sqrt{2}.$
9. $\operatorname{tg} 2x = -1.$
10. $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 0.$
11. $\frac{1}{\operatorname{ctg} x} - \sqrt{3} = 0.$
12. $\left(\frac{\operatorname{ctg} 5x}{2}\right)^2 = 0,25.$
13. $\sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = 0.$
14. $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0.$
15. $\operatorname{ctg}\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = 0.$
16. $2 \sin x = \sqrt{3}.$
17. $2 \cos \frac{x}{2} = 1.$
18. $5 \sin x = 0.$
19. $\cos 2x = 0.$
20. $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{3}.$

Найдите сумму наименьшего положительного и наибольшего отрицательного корней уравнения.

21. $\sin(-x) = \frac{1}{2}.$
22. $\cos(-x) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$
23. $\sin(-x) = -\frac{1}{2}.$
24. $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$

1.2.3. Иррациональные уравнения.

2. Пусть x_0 – наименьший корень уравнения:
3. $\sqrt{6 - 4x - x^2} = x + 4.$ Найдите $2 \cdot x_0 - 1.$
4. Пусть x_0 – неположительный корень уравнения:
5. $\sqrt{1 - 4x - x^2} = x - 1.$ Найдите $3 \cdot x_0 + 2.$
6. Пусть x_0 – наименьший корень уравнения:
7. $\sqrt{8 - 6x - x^2} = x + 6.$ Найдите $2 - x_0.$
8. Найдите сумму корней уравнения: $\sqrt{4 - 6x - x^2} = x + 4.$

Найдите среднее арифметическое корней уравнения.

$$9. \sqrt{x^2 - 5} - \sqrt{-4x} = 0.$$

$$10. \sqrt{x^2 + 3x + 7} - \sqrt{1 - 2x} = 0.$$

Найдите наименьший корень уравнения.

$$11. (2 - \sqrt{3x - 4}) \cdot (\sqrt{4x - 1} - 2) = 0.$$

$$12. (1 - \sqrt{2 + 3x}) \cdot (\sqrt{4x + 6} - 3) = 0.$$

$$13. (\sqrt{2x - 3} - 2) \cdot (\sqrt{10 - 3x} - 1) = 0.$$

1.2.4. Графическое решение уравнения.

1. На рис. 1 изображен график функции $y = f(x)$. Найдите количество целых корней уравнения $f(x) = 0$.

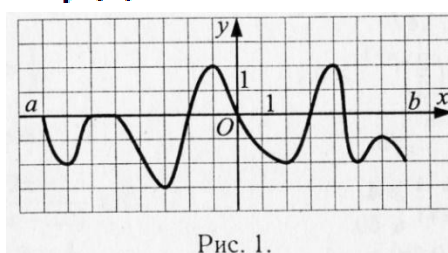


Рис. 1.

2. На рис. 2 изображен график функции $y = f(x)$. Найдите количество целых корней уравнения $f(x) = 0$.

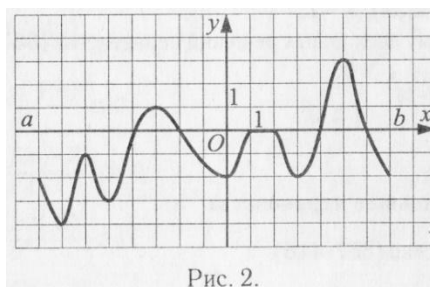


Рис. 2.

1.3. Неравенства.

1.3.1. Логарифмические и показательные неравенства.

Решите неравенство.

$$1. 3^{5-3x} - 1 \geq 0.$$

$$2. \left(\frac{2}{5}\right)^{2+3x} - 2 \geq -1.$$

$$3. \left(\frac{3}{5}\right)^{1-2x} - 1 \geq 0.$$

$$4. 3^{5x+3} - 9^{1-x} \leq 0.$$

$$5. \left(\frac{2}{4}\right)^{7x+3} - \left(\frac{3}{4}\right)^{5x-2} \leq 0.$$

$$6. 3^{2x-1} + 3^{2x-2} \geq 4.$$

$$7. \log_{0,25}(2 - 0,5x) > -1.$$

$$8. \log_{0,5}(1 - 0,5x) > -3.$$

$$9. \log_{0,2}(0,2 - 0,5x) > 1.$$

$$10. \log_{0,25}(1 - 2,5x) > -1.$$

Найдите сумму всех целых решений неравенства.

$$11. 3^{(x+3)(1-x)} - 1 \geq 0.$$

$$12. \left(\frac{1}{2}\right)^{(x+1)(x-2)} - 1 \geq 0.$$

1.3.2. Рациональные неравенства.

Решите неравенство.

$$1. \frac{2x-1}{(5-4x)(8+x)} \geq 0.$$

$$2. \frac{(2-x)x}{x-3} \geq 0.$$

$$3. \frac{x(3-x)}{x-2} \geq 0.$$

$$4. \frac{(x-2)(x+3)}{x} \geq 0.$$

$$5. \frac{x-2}{5x+3} \leq -\frac{1}{2}.$$

$$6. \frac{2x+1}{2-3x} \geq \frac{1}{3}.$$

$$7. \frac{5-7x}{2x+5} \geq 3.$$

$$8. \frac{3x}{(6x-7)(x+5)} \geq 0.$$

$$9. \frac{(4+x)(3+4x)}{3-x} \geq 0.$$

$$10. \frac{(3x-4)(5x-3)}{2x+4} \geq 0.$$

$$11. \frac{(5-7x)(5x+3)}{3x-7} \leq 0.$$

$$12. \frac{(1-3x)(4-x)}{5-2x} \geq 0.$$

$$13. \frac{1}{(7-6x)(2x+3)(5-11x)} \geq 0.$$

$$14. \frac{3-4x}{5-x} \leq 2.$$

$$15. \frac{1}{(2x-6)(10-5x)(4+7x)} \leq 0.$$

$$16. \frac{4-3x}{(9-3x)(8-2x)} \geq 0.$$

$$17. \frac{(x+1)(3-2x)}{x-5} \leq 0.$$

$$18. \frac{x-7}{(5+x)(4x-20)} \geq 0.$$

$$19. \frac{(0,7+x)(10-x)}{2x+5} < 0.$$

$$20. (13-x)(4+x)(2x+5) > 0.$$

Укажите количество целых решений неравенства.

21. $\frac{x^2(1-x)}{(2+x)} > 0.$

22. $\frac{(x-2)^2(x-3)}{x+2} < 0.$

23. $\frac{(x+1)^2(2-x)}{x+3} > 0.$

24. $\frac{(x+2)^2(x+3)}{3-x} > 0.$

25. $\frac{26-x}{(7-3x)x} \geq 0.$

1.3.3. Графическое решение неравенств.

2. На рис.3 изображен график функции $y = f(x)$. Укажите множество решений неравенства $f(x) \leq 0$.

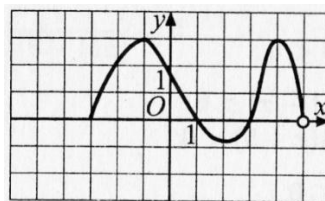


Рис. 3.

3. На рис.4 изображен график функции $y = f(x)$. Решите неравенство $f(x) < 0$.

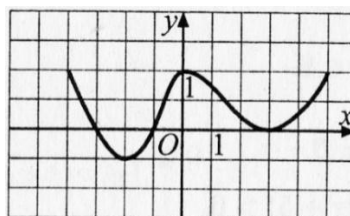


Рис. 4.

4. Решите неравенство $f(x) - 1 \geq 0$, если на рисунке изображен график функции $y = f(x)$, заданная на промежутке $[-4; 7]$ (рис.5).
5. Решите неравенство $f(x) - 1 > 0$, если на рисунке изображен график функции $y = f(x)$, заданная на промежутке $[-3; 9]$ (рис.6).
6. Решите неравенство $f(x) \leq 1$, если на рисунке изображен график функции $y = f(x)$, заданная на промежутке $[-4; 4)$ (рис.7).

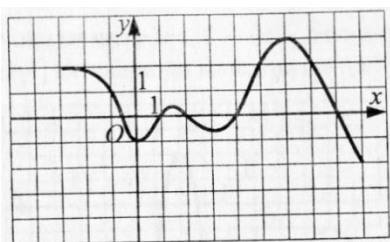


Рис. 5.

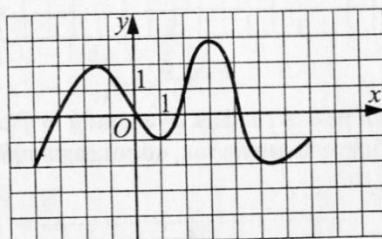


Рис. 6.

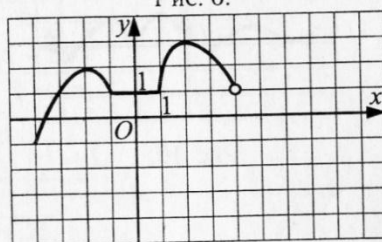


Рис. 7.

7. Найдите количество целочисленных решений неравенства $2f(x) + 1 \leq 0$, если на рисунке изображен график функции $y = f(x)$ (рис.8).

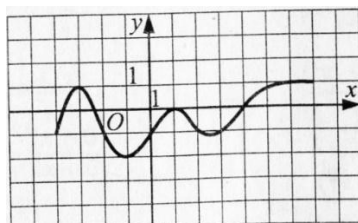


Рис. 8.

8. Решите неравенство $f(x) + 2 \geq 0$, если на рисунке изображен график функции $y = f(x)$, заданной на промежутке $[-4; 5]$ (рис.9).

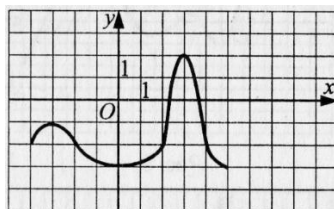


Рис. 9.

9. На рис.10 изображен график функции $y = f(x)$, с областью определения $[-5; 5]$. Найдите промежуток, не содержащий ни одного решения неравенства $f(x) < 0$.

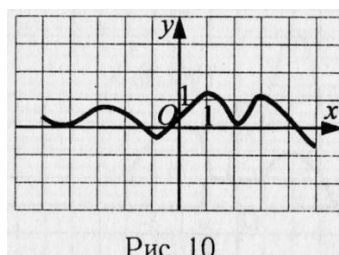


Рис. 10.

1.4. Функции.

1.4.1. Область определения функции.

Найдите область определения функции.

1. $y = \sqrt{\frac{1}{2} - (0,5)^{1-x}}.$
2. $y = \log_{0,5}(25 - x^2).$
3. $y = \sqrt{(1,5)^{-x} - \frac{3}{2}}.$
4. $y = \log_7(9x - x^2).$
5. $y = \sqrt{0,25 - (2^{-2})^{x+1}}.$
6. $y = \ln(169 - x^2).$
7. $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x^3).$
8. $y = \log_5(x - 3) - \log_5(3x + 4).$
9. $y = \log_3(3 - x) - 2(x - 2).$
10. $y = \log_5 \frac{(1+x)^2}{2-3x}.$
11. $y = 7 \cdot \sqrt{\log_{11}|x| - 1}.$
12. $y = \sqrt{\ln(7x + 5) - 1}.$
13. $y = \ln \left(9^{1,5-0,3x} - \frac{1}{27} \right).$
14. $y = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \right)^{2x-9} - \frac{1}{4}}.$
15. $y = \frac{2}{\operatorname{tg}^2 x} + \cos 3x^2.$
16. $y = \log_{\log_{0,6}(2x+3)} 1.$
17. $y = \sqrt{\log_5(3x + 1) - \log_5(4 - x)}.$
18. $y = \sqrt[4]{\log_9 \frac{2-x}{5}}.$
19. $y = \sqrt{1 - \log_{0,1}(10x)}.$
20. $y = \sqrt[6]{\log_{0,5}(6x + 1) - 1}.$

На каком множестве совпадают функции.

21. $y = e^{\ln(3x-x^2)}$ и $y = 3x - x^2$?

22. $y = e^{\ln \frac{5-x}{x}}$ и $y = \frac{5-x}{x}$?

23. $y = \pi^{\log_{\pi} \frac{x+1}{1-x}}$ и $y = \frac{x+1}{1-x}$?

24. Найдите все значения аргумента, при которых функция

$$y = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 2x} + \sin^2 2x \text{ не определена.}$$

25. Функция $y = f(x)$ задана графиком на рис.11. Найдите область определения функции.

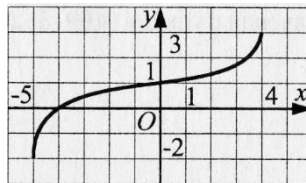


Рис. 11.

26. Функция $y = f(x)$ задана графиком на рис.12. Найдите область определения функции.

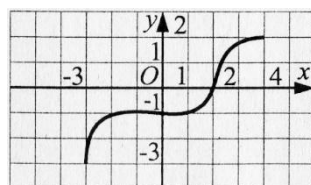


Рис. 12.

27. Функция $y = f(x)$ задана графиком на рис.13. Найдите область определения функции.

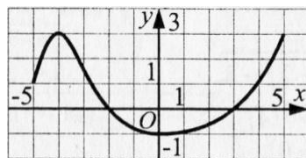


Рис. 13.

28. Функция $y = f(x)$ задана графиком на рис.14. Найдите область определения функции.

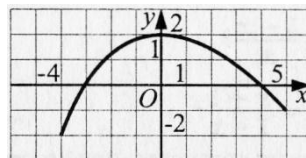


Рис. 14.

1.4.2. Множество значений функции.

Найдите множество значений функции.

1. $y = 1 - 2 \sin x$.

2. $y = \frac{1}{2} \cos x + \frac{3}{2}$.

3. $y = 3 \cdot 2^x + 2$.

4. $y = \frac{8}{\pi} \arctg^2 x - 1.$
5. $y = 2 \operatorname{arccctg} x - \pi.$
6. $y = 4 \arctg x + 2\pi.$
7. $y = \left(\frac{3}{\pi} \operatorname{arccctg} x\right)^2.$
8. $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x - 10.$
9. $y = 0,4^x + 7.$
10. $y = \log_3 \left(\frac{1}{4} \cos x + \frac{5}{3}\right).$
11. $y = \log_{\frac{1}{2}}(4 - 3^x).$
12. $y = \sqrt{-\sin x}.$
13. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x}} - 3.$
14. $y = \sqrt{\cos x + 2}.$
15. $y = 17 - 10^{\cos x}.$
16. $y = 7 \ln \left(\frac{\sqrt{x}}{2} + 1\right) - 3.$
17. $y = 3\sqrt{\operatorname{tg} x - 1}.$

18. Функция $y = f(x)$ задана на промежутке $[-7; 6]$ (рис.15). Найдите ее область значений.

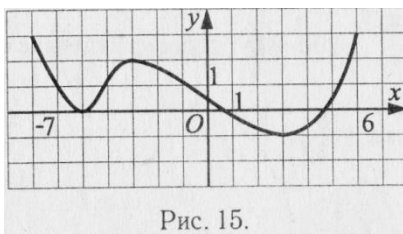


Рис. 15.

19. Функция $y = f(x)$ задана на промежутке $[-8; 7]$ (рис.16). Найдите ее область значений.

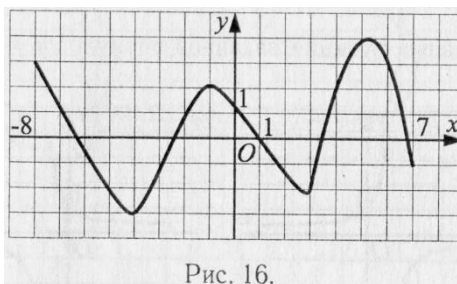


Рис. 16.

20. Функция $y = f(x)$ задана на промежутке $[-8; 7]$ (рис.17). Найдите ее область значений.

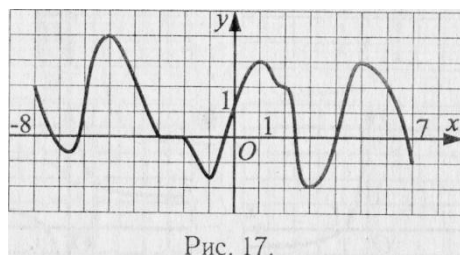


Рис. 17.

1.4.3. График функции.

2. На одном из рисунков изображен график функции $y = x^2$ (рис.18).
Укажите этот рисунок.

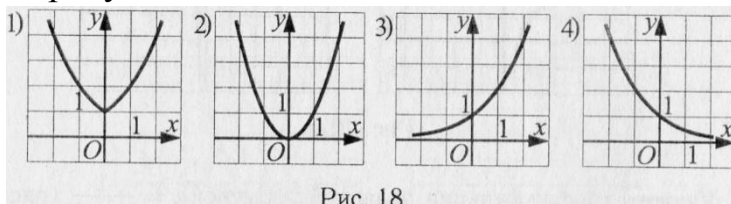


Рис. 18.

3. Укажите график функции, заданной формулой $y = \sin x$ (рис.19).

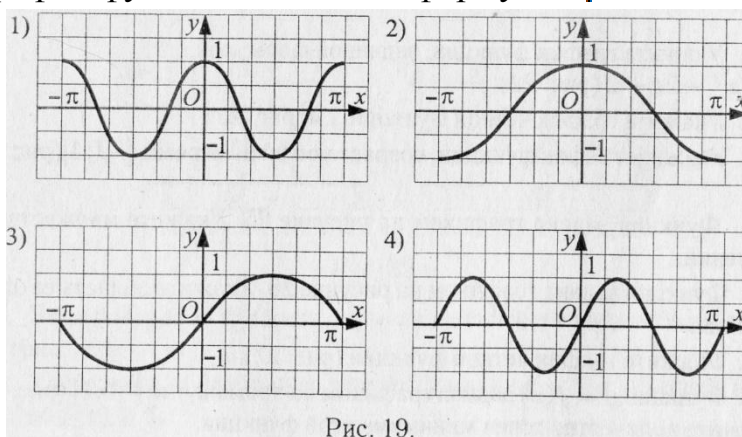


Рис. 19.

4. Укажите график функции, заданной формулой $y = \frac{x-1}{x}$ (рис.20).

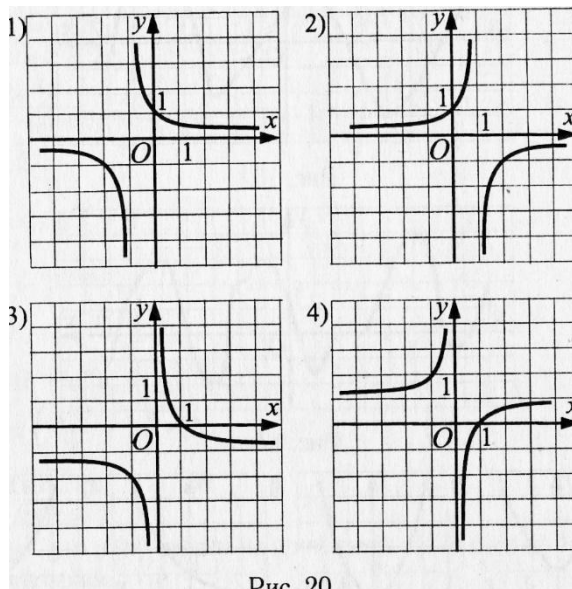


Рис. 20.

5. Укажите график функции, заданной формулой $y = \frac{1}{x+1}$ (рис.21).

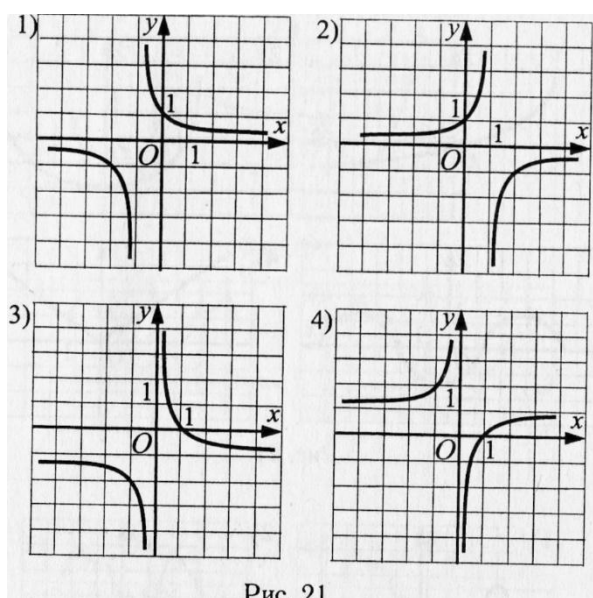


Рис. 21.

6. Укажите график функции, заданной формулой $y = x^2 - 2x + 2$ (рис.22).

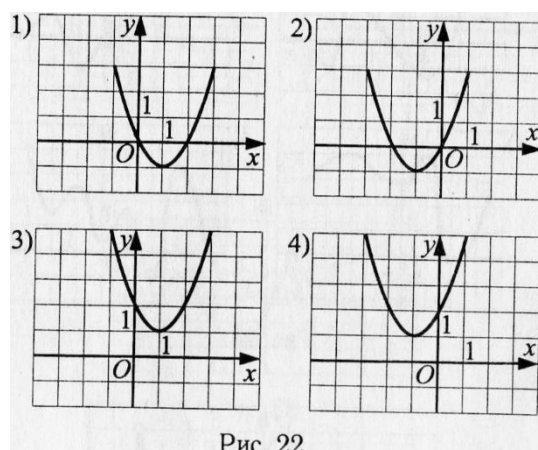


Рис. 22.

7. Укажите график четной функции (рис.23).

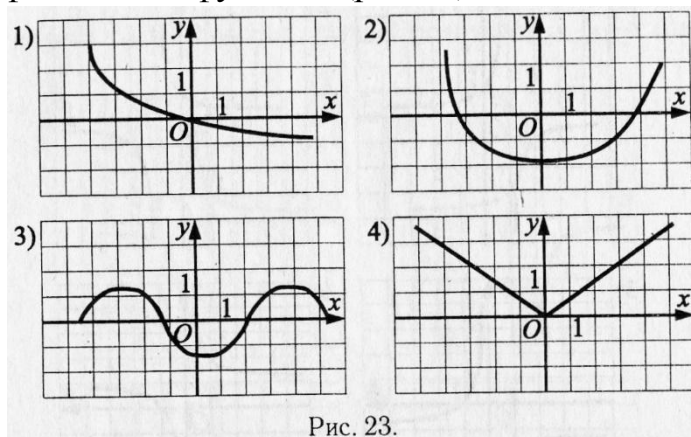


Рис. 23.

8. Укажите график функции, возрастающей на отрезке $[-1;1]$ (рис.24).

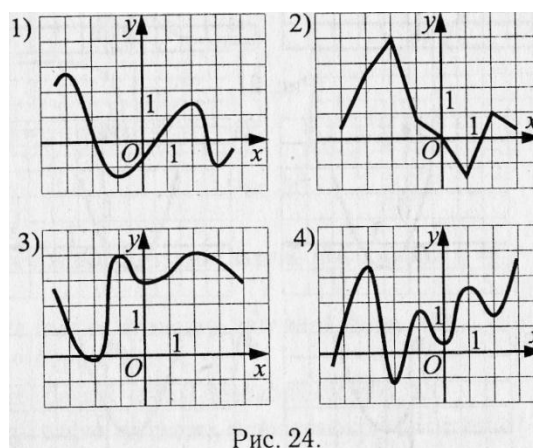


Рис. 24.

9. Функция задана графиком на рис.25. Укажите множество ее значений.

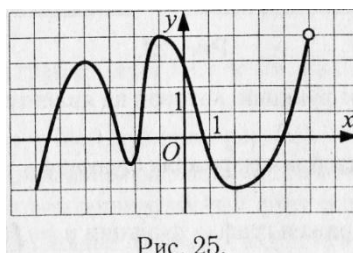


Рис. 25.

10. Функция задана графиком на рис.26. Укажите множество ее значений.

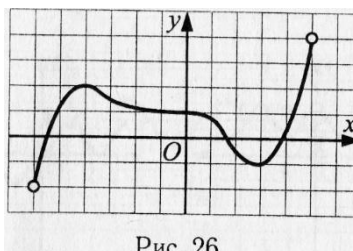


Рис. 26.

11. Укажите график четной функции (рис.27).

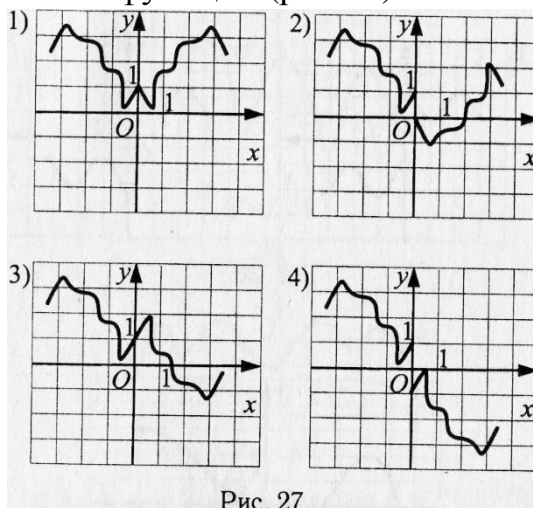


Рис. 27.

12. Функция $y = f(x)$ задана графиком на промежутке $[-5; 5]$ (рис.28). Укажите количество точек минимума этой функции.

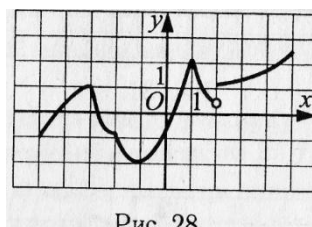


Рис. 28

13. Функция $y = f(x)$ задана графиком на промежутке $[-5; 5]$ (рис.29).

Укажите наибольшее значение функции.

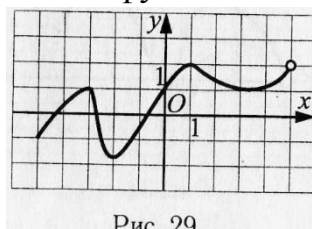


Рис. 29.

1.4.4. Производная функции, наибольшее и наименьшее значение функции.

Найдите производную функции.

1. $y = x^7 - 2\cos x + \frac{1}{8}$.

2. $y = 2^x + 4x^3$.

3. $y = \frac{1}{x} - xe^x$.

4. $y = x^3 \ln x + \ln 5$.

5. $y = \sin e^x - 9x^3$.

6. $y = \sin(5 - 2x)$.

7. $y = \cos\left(4 - \frac{1}{3}x\right)$.

8. $y = \sin\left(2 - \frac{5}{7}x\right)$.

9. $y = x^3 - 3\sin 2x - 6$.

Найдите значение производной функции в точке x_0 .

10. $y = x^2 \cdot e^x, x_0 = 1$.

11. $y = e^x \cdot \sin x, x_0 = 1$.

12. $y = \frac{x}{\ln x}, x_0 = e$.

13. $y = 2 \sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) - \pi^2 + e^3, x_0 = \frac{\pi}{3}$.

14. $y = \ln x + 3x^2, x_0 = \frac{2}{3}$.

15. $y = e^x \cdot \ln x, x_0 = e$.

16. $y = \frac{1}{4x+3}, x_0 = -1$.

17. $y = 2(x+1) \cos x, x_0 = \frac{\pi}{4}$.

18. $y = \frac{x^2+1}{x-1}, x_0 = 3.$
19. $y = \frac{\sin x}{2x} - 4, x_0 = \frac{\pi}{2}.$
20. $y = \operatorname{ctg}\left(x - \frac{5}{6}\pi\right) + 2, x_0 = 2\frac{1}{3}\pi.$
21. $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 1, x_0 = 2.$
22. $y = 3 \ln 3x - 2 \cos\left(\frac{x}{3} - 1\right), x_0 = 3.$
23. $y = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x}, x_0 = \frac{\pi}{6}.$
24. $y = \frac{\sin x}{\ln x}, x_0 = e.$

Через точку графика функции $y = f(x)$ с абсциссой x_0 проведена касательная. Найдите угловой коэффициент этой касательной.

25. $y = \sqrt{x} + x^3 + \frac{1}{x}, x_0 = 1.$
26. $y = \log_3 x + 2x^2, x_0 = 1.$
27. $y = \frac{\sin 2x}{3} + 1, x_0 = \frac{\pi}{3}.$
28. $y = \frac{\operatorname{ctg} 2\pi x}{\pi} + 4x, x_0 = \frac{1}{8}.$
29. $y = \frac{x^3}{4} - 2x^4 + \frac{x^2}{3} + \frac{x}{2} - 1, x_0 = 2.$
30. $y = e^{4x+4} + \ln(2x+3) + 4, x_0 = -1.$

31. При движении тела по прямой скорость V (в м/с) от начальной точки изменяется по закону $V(t) = t^2 - 3t + 1$ (t — время в секундах). Найти ускорение (м/с²) тела через 6 секунд после начала движения.
32. При движении тела по прямой скорость V (в м/с) от начальной точки изменяется по закону $V(t) = 3t^2 - 2t + 1$ (t — время в секундах). Найти ускорение (м/с²) тела через 3 секунд после начала движения.
33. При движении тела по прямой скорость V (в м/с) от начальной точки изменяется по закону $V(t) = 2t^2 - t + 1$ (t — время в секундах). Найти ускорение (м/с²) тела через 5 секунд после начала движения.
34. При движении тела по прямой расстояние S (в метрах) от начальной точки изменяется по закону $S(t) = \frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} + t^2 + 1$ (t — время в секундах). Найти ускорение (м/с) тела через 4 секунд после начала движения.
35. При движении тела по прямой скорость S (в м/с) от начальной точки изменяется по закону $S(t) = t^3 - t^2 + 5t + 1$ (t — время в секундах). Найти ускорение (м/с) тела через 3 секунд после начала движения.

1.4.5. Преобразования функции.

Для функции $y = f(x)$ найдите первообразную, график которой проходит через точку M .

1. $y = \frac{1}{2} \cos x, M\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\right)$.
2. $y = \frac{2}{\cos^2 x}, M\left(-\frac{\pi}{4}; 0\right)$.
3. $y = \sin 2x, M\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$.
4. $y = \frac{1}{2x} - 3e^x, M(1; 2 - 3e)$.
5. $y = 2e^2 - \frac{3}{x}, M(1; 2e - 1)$.
6. Известно, что график первообразной $F(x)$ для функции $f(x) = -x^3 + 3x^2$, прямая $x = 2$ и ось абсцисс пересекаются в одной точке. Найдите $F(-2)$.
7. Известно, что график первообразной $F(x)$ для функции $f(x) = 3x^2 + 5x$, прямая $x = -2$ и ось абсцисс пересекаются в одной точке. Найдите $F(2)$.
8. Известно, что график первообразной $F(x)$ для функции $f(x) = -5x^4 + 4x^3 + 1$, прямая $x = -1$ и ось абсцисс пересекаются в одной точке. Найдите $F(1)$.
9. Для функции $f(x) = \frac{1}{x^2} - 1$ найдите первообразную $F(x)$, график которой пересекает ось Ox в точку с абсциссой равной -1.
10. Для функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + 2$ найдите первообразную $F(x)$, график которой пересекает ось Ox в точку с абсциссой равной 4.
11. Для функции $f(x) = \frac{4}{x^2} + 3$ найдите первообразную $F(x)$, график которой пересекает ось Ox в точку с абсциссой равной 1.
12. Точка движется прямолинейно, и его скорость изменяется по закону $V(t) = (3t^2 - 6t)$ м/с. В момент времени $t = 2$ с тело находится на расстоянии $S = 23$ м от начала отсчета. Укажите формулу, которой задается зависимость расстояния от времени.
13. Точка движется прямолинейно, и его скорость изменяется по закону $V(t) = (9t^2 - 4)$ м/с. В момент времени $t = 2$ с тело находится на расстоянии $S = 21$ м от начала отсчета. Укажите формулу, которой задается зависимость расстояния от времени.
14. Точка движется прямолинейно, и его скорость изменяется по закону $V(t) = (6t^2 - 10t)$ м/с. В момент времени $t = 3$ с тело находится на

расстоянии $S = 8$ м от начала отсчета. Укажите формулу, которой задается зависимость расстояния от времени.

§2. Геометрия.

2.1. Планиметрия.

2.1.1. Вписанная и описанная окружность.

1. В треугольнике ABC синус угла C равен $\frac{3}{5}$, $AC = 5$, $BC = 4$. Найти радиус вписанной в этот треугольник окружности, если $AB < AC$.
2. В равносторонний треугольник ABC вписана окружность и проведен отрезок MN , $M \in AC$, $N \in BC$, который касается ее и параллелен стороне AC . Определите периметр трапеции $AMNB$, если длина отрезка MN равна 6.
3. Около равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) с углом B , равным 30° , описана окружность радиусом $7\sqrt{2}$. Ее диаметр AD пересекает сторону BC в точке E . Найдите диаметр окружности, описанной около треугольника AEC .
4. Около окружности радиуса $\sqrt{3}$ описан равносторонний треугольник. К этой же окружности проведена касательная, отсекающая от данного треугольника меньший треугольник. Найдите периметр меньшего треугольника.
5. Треугольник ABC вписан в окружность с центром O . Скалярное произведение векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OC}$ равно $\frac{\sqrt{3}-2}{2}$. Найдите длину стороны AB , если $\angle ABC = 60^\circ$ и $\angle BCA = 75^\circ$.

2.1.2. Вписанная и описанная окружность, n - угольник.

1. Около круга радиуса 2, вписана равнобедренная трапеция с острым углом 30° . Найдите длину средней линии трапеции.
2. Радиус окружности, вписанной в ромб, в четыре раза меньше одной из его диагоналей и равен $4\sqrt{3}$. Найдите периметр этого ромба.
3. Найдите радиус окружности, вписанной в правильный шестиугольник, площадь которого равна $72\sqrt{3}$.
4. Найдите отношение площади круга, вписанного в правильный шестиугольник, к площади круга, описанного около этого шестиугольника.

5. В равнобедренную трапецию, большее основание которой равно 36, вписана окружность радиуса 12. Найдите наименьшее основание трапеции.
6. Около окружности описана равнобокая трапеция, средняя линия которой равна 5, а синус острого угла при основании равен 0,8. Найдите площадь трапеции.
7. В равнобедренной трапеции длины оснований 21 и 9, а длина высоты 8. Найдите диаметр описанной около трапеции окружности.

2.1.3. Треугольник.

1. В треугольнике ABC точка D делит сторону AC на отрезки $AD = 3$ и $DC = 13$; $\angle BAC = 60^\circ$; $\angle ABD = \angle ACB$. Найдите площадь треугольника ABC .
2. В треугольнике ABC точка D делит сторону AC на отрезки $AD = 4$ и $DC = 5$; $\angle BAC = 30^\circ$; $\angle ABD = \angle ACB$. Найдите площадь треугольника ABC .
3. В равнобедренном треугольнике ABC угол при вершине B равен 120° . Расстояние от точки M , лежащей внутри треугольника, до основания треугольника равно $2\sqrt{3}$, а до боковых сторон равно 1. Найти AC .
4. В равнобедренном треугольнике ABC угол при вершине B равен 120° . Расстояние от точки M , лежащей внутри треугольника, до основания треугольника равно $\frac{1}{\sqrt{3}}$, а до боковых сторон равно 3. Найти AC .
5. В равнобедренном треугольнике ABC угол при вершине B равен 120° , а радиус вписанной окружности $(2 - \sqrt{3})$. Найдите AC .
6. В треугольнике ABC сторона BC равна $2\sqrt{97}$ и она больше половины стороны AC . Найдите сторону AB , если медиана BM равна 12, а площадь треугольника ABC равна 96.
7. В треугольнике ABC сторона AB равна 10, угол A – острый. Найдите медиану BM , если $AC = 20$, а площадь треугольника ABC равна 96.
8. В треугольнике ABC угол B в два раза больше угла A , а длина стороны BC равна 40. Найдите сторону AB , если длина биссектрисы BD равна 39.
9. Отрезки AB и CD пересекаются, а точке M так, что $BM = MC = 4$, $AM = MD = 5$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CBD .
10. Дан треугольник ABC . Известно, что $AC = 10$, $BC = 12$ и $\angle CAB = 2\angle CBA$. Найдите длину стороны AB .

2.1.4. Параллелограмм. Квадрат.

1. В параллелограмме $ABCD$ угол BAD равен 120° . Биссектриса угла ADC пересекает прямую AB в точке E . В треугольнике ADE вписана окружность с центром в точке O . Найдите периметр треугольника ADE , если $AO = 7 - 4\sqrt{3}$.
2. Дан параллелограмм $ABCD$ с тупым углом при вершине B . Синус угла BAD равен $\frac{2\sqrt{2}}{3}$, а длина стороны AB равна 6. Найдите периметр треугольника ABC , если площадь параллелограмма равна $20\sqrt{2}$.
3. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O . Радиус окружности, описанной около треугольника ABD , равен $3\sqrt{6}$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника AOD , если $\angle ABD = 45^\circ$, а $\angle ACD = 75^\circ$.
4. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O . Радиус окружности, описанной около треугольника ABD , равен $7\sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника COD , если $\angle BAC = 30^\circ$, а $\angle BCA = 15^\circ$.
5. Через точку пересечения диагоналей квадрата проведены две взаимно перпендикулярные прямые, составляющие с пересекаемыми сторонами квадрата угол 60° . Найдите площадь четырехугольника, вершинами которого являются точки пересечения проведенных прямых со сторонами квадрата, если сторона квадрата равна 3.

2.1.5. Трапеция.

1. В трапеции большее основание равно 25, одна из боковых сторон равна 15. Известно, что одна из диагоналей перпендикулярна заданной боковой стороне, а другая делит угол между заданной боковой стороной и нижним основанием пополам. Найдите площадь трапеции.
2. В трапеции $ABCE$ основание AE равно 16, $CE = 8\sqrt{3}$. Окружность, проходящая через точки A , B и C , вторично пересекает прямую AE в точке H . Найдите AC , если $\angle AHB = 60^\circ$.
3. Продолжение боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке E . Найдите периметр треугольника AED , если $AB = 3, BC = 10, CD = 4, AD = 12$.
4. В трапеции $ABCD$ с большим основанием AD диагонали AC и BD пересекаются в точке O . Найдите площадь трапеции, если площадь треугольника BOC равна 4, а площадь треугольника AOD равна 9.
5. Найдите длину средней линии трапеции, в которой диагонали перпендикулярны, а их длины равны 10 и 24.

6. Средняя линия трапеции равна 10 и делит площадь трапеции в отношении 3:5. Найдите длину большего основания трапеции.
7. Основание AB трапеции $ABCD$ вдвое длиннее основания CD и вдвое длиннее боковой стороны AD . Длина диагонали AC равна 12, длина боковой стороны BC равна 5. Найдите площадь трапеции.
8. Боковые стороны равнобедренной трапеции при их продолжении пересекаются под прямым углом. Найдите длину большего основания трапеции, если ее площадь равна 12, а высота равна 2.
9. В равнобедренную трапецию, длина меньшего основания которой равна 4, можно вписать окружность. Найдите длину большего основания, если длина диагонали трапеции равна $\sqrt{89}$.
10. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC . Известно, что $AC = 4, BD = 5$ и $\angle CAD = 2\angle BDA$. Найдите длину средней линии трапеции.

2.1.6. Окружность, касательная, секущая.

1. Из точки A , не лежащей на окружности, проведены к ней касательная и секущая. Расстояние от точки A до точки касания равно 16 см, а до одной из точек пересечения секущей с окружностью равно 32 см. Найти радиус окружности, если секущая удалена от ее центра на 5 см.
2. Из точки A , не лежащей на окружности, проведены к ней касательная и секущая. Расстояние от точки A до наиболее удаленной от нее точки A до точки касания касательной, если радиус окружности равен 13, а секущая удалена от центра окружности на 5 см.
3. В окружности радиуса 12 проведена хорда длины 6. Через один конец хорды проведена касательная к этой окружности, а через другой - секущая, параллельная касательной. Найдите расстояние между касательной и секущей.
4. Две окружности, радиус одной из которых вдвое больше радиуса другой, касаются друг друга в точке C . К этим окружностям проведена общая внешняя касательная, касающаяся этих окружностей в точках A и B . Найдите сумму $AC + BC$, если радиус меньшей окружности равен $\sqrt{3}(2 - \sqrt{2})$.
5. Из точки проведены к окружности две касательные. Расстояние от этой точки до каждой из точек касания равно 5. Найдите радиус окружности, если расстояние между точками касания равно 6.
6. Две касающиеся окружности одинакового радиуса 0,75 находятся внутри третьей окружности и касаются ее так, что диаметры всех трех окружностей лежат на одной прямой. Найдите радиус окружности, касающихся всех трех данных окружностей.

7. Точка O лежит на отрезке AB так, что $AO = 13, OB = 15$. С центром в точке O проведена окружность радиусом 12. Из A и B к ней проведены две касательные, пересекающиеся в точке M , причем точки касания лежат по одну сторону от прямой AB . Найдите длину наибольшей стороны треугольника AMB .
8. Из точки A окружности проведены две касательные, образующие угол 60° и касающиеся окружности в точках B и C . Третья касательная к данной окружности отсекает от треугольника ABC меньший треугольник. Найдите периметр меньшего треугольника, если периметр треугольника ABC равен 10,5.
9. В окружности проведена хорда MN длины $11\sqrt{3}$ и диаметр MP . В точке N проведена касательная к окружности, пересекающая продолжение диаметра MP за точку P в точке Q под углом 30° . Найдите длину отрезка PQ .
10. В окружности радиуса $\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ проведены хорда AB и диаметр AC . В точке B проведена касательная к окружности, пересекающая продолжение диаметра AC за точку C под углом 60° . Найдите расстояние от центра окружности до хорды BC .

2.2. Стереометрия.

2.2.1. Пирамида.

1. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с катетами 6 и $6\sqrt{3}$. Боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 30° . Вычислите объем пирамиды.
2. Основание пирамиды - треугольник, две стороны которого равны 3 и 6 и образуют угол в 60° . Боковые ребра наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом. Найдите объем пирамиды, если боковое ребро равно $\sqrt{21}$.
3. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник с катетами 5 и 12. Все двугранные углы пирамиды при сторонах основания равны. Найдите площадь полной поверхности пирамиды, если высота пирамиды равна $\sqrt{5}$.
4. Дана пирамида $SABCD$, в основании которой лежит квадрат. Боковое ребро SD перпендикулярно плоскости основания, а ребро SC наклонено к плоскости основания под углом в 60° . Найдите длину стороны основания пирамиды, если площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через ее вершину и середины сторон AD и CD , равна $\frac{5}{8}$.

5. Высота правильной треугольной пирамиды равна $2\sqrt{5}$, боковое ребро образует с плоскостью основания угол 45° . Найдите расстояние от центра основания пирамиды до боковой грани.
6. Найдите отношение площади боковой поверхности правильной шестиугольной пирамиды к площади ее основания, если сторона основания равна 1, а высота равна $\sqrt{6}$.
7. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 8, сторона основания равна 12. Вычислите площадь сечения, проведенного через центр основания параллельно боковой грани пирамиды.
8. Основание пирамиды - прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Все двугранные углы при основании пирамиды равны 60° . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
9. Объем треугольной пирамиды равен 81. Высота пирамиды разделена на три равные части и через точки деления проведены плоскости параллельно основанию. Найдите объем части пирамиды, находящейся между проведенными плоскостями.
10. В основании четырехугольной пирамиды лежит квадрат. Одно из боковых ребер пирамиды перпендикулярно основанию. Найдите объем пирамиды, если ее наибольшее боковое ребро равно $\sqrt{73}$, а отрезок, соединяющий центр основания с вершиной пирамиды, равен 5.
11. В правильной треугольной пирамиде через сторону основания и середину противоположного ребра проведена плоскость, которая оказалась перпендикулярной этому ребру. Найдите объем пирамиды, если площадь сечения пирамиды проведенной плоскостью равна $\sqrt{162}$.
12. Дана правильная четырехугольная пирамида. Через диагональ основания и середину скрещивающегося с ней бокового ребра проведена плоскость, которая оказалась перпендикулярной этому ребру. Найдите объем пирамиды, если площадь сечения пирамиды проведенной плоскостью равна $\sqrt{162}$.
13. В правильной треугольной усеченной пирамиде ребра нижнего и верхнего сечения оснований соответственно равны $5\sqrt{3}$ и $\sqrt{3}$. Боковое ребро пирамиды наклонено к плоскости нижнего основания под углом 60° . Найдите объем данной усеченной пирамиды.
14. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, где S - вершина, равна 8. Найдите расстояние между прямыми, содержащими ребра CD и SB , если высота пирамиды равна 3.
15. В правильной усеченной четырехугольной пирамиде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с боковыми ребрами AA_1 , BB_1 , CC_1 и DD_1 длины сторон оснований равны 5 и 11. Диагональ AC_1 пирамиды равна 12. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

2.2.2. Призма. Параллелепипед.

1. Боковые ребра призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, в основании которой лежит квадрат, наклонены к плоскости основания под углом в 30° . Отрезок $D_1 A$ перпендикулярен плоскости основания. Найдите длину стороны основания призмы, если площадь ее боковой поверхности равна $8\sqrt{3}$.
2. Основанием прямой призмы служит равнобедренная трапеция $ABCD$, в которой $AB = CD = 13, BC = 11, AD = 21$. Площадь диагонального сечения призмы равна 180. Найдите площадь полной поверхности призмы.
3. Основанием прямой четырехугольной призмы является ромб с углом в 60° . Найдите острый угол между большей диагональю нижнего основания и скрещивающейся с ней диагональю боковой грани, если отношение высоты призмы к стороне ее основания равно $\sqrt{2}$.
4. Объем правильной четырехугольной призмы равен $343\sqrt{24}$. Через диагональ нижнего основания и одну из вершин верхнего основания проведена плоскость, пересекающая две смежные боковые грани по прямым, угол между которыми равен $2\arcsin \frac{1}{5\sqrt{2}}$. Найдите сторону основания призмы.
5. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием BC , равным 4, и боковой стороной длины 5. Площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через ребро AB и вершину C_1 , равна 10. Найдите боковое ребро призмы.

2.2.3. Конус.

1. Высота конуса равна 20, радиус основания равен 25. Найдите площадь сечения, проведенного через вершину, расстояние от центра основания конуса 12.

2.2.4. Цилиндр.

1. Высота цилиндра равна $2\sqrt{11}$. Вершина A и B правильного треугольника ABC со стороной, равной 12, расположены на окружности одного основания этого цилиндра, а вершина C - на окружности другого основания. Найдите расстояние между осью цилиндра и параллельной ей плоскостью, проходящей через точки A и C .

Ответы к сборнику задач.

§1. Алгебра и начала анализа.

1.1. Выражения и преобразования.

1.1.1. Степень с рациональным показателем.

1. $a^{-\frac{9}{14}}$. 2. a . 3. $a^{-\frac{13}{6}}$. 4. $a^{\frac{1}{6}}$. 5. $a^{3,5}$. 6. $8k^8$. 7. $5t^2$. 8. $3u^4$. 9. $2t^4$. 10. a^3 . 11. 343,754. 12. -1,23. 13. 0,2.
14. 0,125. 15. 0,36. 16. $\frac{2}{3}$. 17. 0. 18. $3^{\frac{2}{3}}$. 19. 3^{-1} . 20. 5^{-1} .

1.1.2. Степени и корни.

1. -0,6. 2. -6. 3. 14. 4. 6. 5. 6. 6. 12. 7. 6. 8. 36. 9. $\frac{1}{\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y}}$. 10. $\frac{1}{x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}}$. 11. $\frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}}$.
12. $\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}$. 13. $\frac{1}{\sqrt{y} - \sqrt{x}}$. 14. $\frac{\sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{x}}$. 15. $\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}$.
16. $\frac{1}{\sqrt[5]{y} + \sqrt[5]{x}}$. 17. -1. 18. $\frac{1}{\sqrt[5]{y} + \sqrt[5]{xy} + \sqrt[5]{x}}$. 19. $\sqrt[5]{a^{-1}b^3}$. 20. $a\sqrt[5]{b}$. 21. m^7 . 22. $6n$. 23. $3\sqrt{5}c$.
24. $2m^2$. 25. $\frac{27}{\sqrt[3]{m^2}}$. 26. $\sqrt{n}$. 27. $21a$. 28. $-\frac{1}{2}$.

1.1.3. Логарифмические и показательные выражения.

1. 2. 2. 6. 3. 32. 4. 1. 5. 5. 6. -5. 7. $\sqrt[4]{6}$. 8. $-2p$. 9. $\frac{k}{n}$. 10. $-\frac{1}{2}$. 11. 2. 12. 250. 13. 54. 14. -1. 15. 4.
16. 3. 17. 2. 18. 3. 19. 2.

1.1.4. Тригонометрические выражения.

1. $1 - \sqrt{3}$. 2. $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$. 3. $1 - \sqrt{3}$. 4. $-\sqrt{3}$. 5. 2. 6. $1 + 2\sqrt{3}$. 7. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. 8. $\sqrt{3}$. 9. $-3\sqrt{3}$. 10. $-\frac{2}{\sqrt{3}}$.
11. $\operatorname{tg}^2 \alpha$. 12. $\operatorname{tg} 2\alpha$. 13. $2\sin \alpha$. 14. 0,5. 15. 4. 16. -5. 17. 2. 18. 4. 19. 6. 20. $\operatorname{ctg}^2 \alpha$. 21. 10,5. 22. 8,3.
23. 1. 24. 4,5. 25. 4.

1.2. Уравнения. Системы уравнений.

1.2.1. Логарифмические и показательные уравнения.

1. $\frac{1}{2}$. 2. $\frac{1}{3}$. 3. $\frac{1}{7}$. 4. $-\frac{63}{4}$. 5. -5. 6. $\frac{35}{4}$. 7. $\frac{8}{9}$.

1.2.2. Тригонометрические уравнения.

1. $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. **2.** $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. **3.** $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. **4.** $\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. **5.** $\pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.
6. $x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. **7.** $-\frac{1}{6} + k, k \in \mathbb{Z}$. **8.** $\pm \frac{3}{4} + 2k, k \in \mathbb{Z}$. **9.** $-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$.
10. $-\frac{2\pi}{3} - 4\pi k, k \in \mathbb{Z}$. **11.** $\frac{\pi}{3} - \pi k, k \in \mathbb{Z}$. **12.** $\frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{10}, n \in \mathbb{Z}$. **13.** $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.
14. $-\pi k, k \in \mathbb{Z}$. **15.** $-\pi k, k \in \mathbb{Z}$. **16.** $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. **17.** $\pm \frac{2\pi}{3} + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}$.
18. $\pi n, n \in \mathbb{Z}$. **19.** $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z}$. **20.** $\pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. **21.** π . **22.** 0 . **23.** $-\pi$. **24.** $-\frac{2}{3}\pi$.

1.2.3. Иррациональные уравнения.

1. -3 . **2.** неположительных корней нет. **3.** 4 . **4.** -1 . **5.** -5 . **6.** $-\frac{5}{2}$. **7.** $\frac{8}{3}$. **8.** $-\frac{1}{3}$.

1.2.4. Графическое решение уравнений.

1. 6. 2. 6.

1.3. Неравенства.

1.3.1. Логарифмические и показательные неравенства.

1. $(-\infty; \frac{5}{3}]$. **2.** $(-\infty; -\frac{2}{3})$. **3.** $[2; +\infty)$. **4.** $(-\infty; -\frac{1}{7}]$. **5.** $[-2, 5; +\infty)$. **6.** $[1; +\infty)$. **7.** $(-4; 4)$. **8.** $(-14; 2)$.
9. $(-0, 4; 0)$. **10.** $(-1, 2; 0, 4)$.

1.3.2. Рациональные неравенства.

1. $(-\infty; -8) \cup [\frac{1}{2}; \frac{5}{4})$. **2.** $(-\infty; 0] \cup [2; 3)$. **3.** $(-\infty; 0] \cup (2; 3]$. **4.** $[-3; 0) \cup [2; +\infty)$.
5. $(-\frac{3}{5}; \frac{1}{7}]$. **6.** $[-\frac{1}{9}; \frac{2}{3})$. **7.** $(-\frac{5}{2}; -\frac{10}{13}]$. **8.** $(-5; 0] \cup (\frac{7}{6}; +\infty)$. **9.** $(-\infty; -4] \cup [-\frac{3}{4}; 3)$.
10. $(-2; \frac{3}{5}] \cup [\frac{4}{3}; +\infty)$. **11.** $[-0, 6; \frac{5}{7}] \cup (2\frac{1}{3}; +\infty)$. **12.** $(-\infty; \frac{1}{3}] \cup (2, 5; 4]$.
13. $(-\frac{3}{2}; \frac{5}{11}) \cup (\frac{7}{6}; +\infty)$. **14.** $[-3, 5; 5)$. **15.** $(-\frac{4}{7}; 2) \cup (3; +\infty)$. **16.** $(-\infty; \frac{4}{3}] \cup (3; 4)$.
17. $[-1; 1, 5] \cup (5; +\infty)$. **18.** $(-5; 5) \cup [7; +\infty)$. **19.** $(-2, 5; -0, 7) \cup (10; +\infty)$.
20. $(-\infty; -4) \cup (-2, 5; 13)$. **21.** 1 . **22.** 3 . **23.** 3 . **24.** 4 . **25.** 0 .

1.3.3. Графическое решение неравенств.

1. $[1; 3] \cup \{-3\}$. **2.** $(-3; -1)$. **3.** $[-3; -1] \cup [4, 5; 7, 5]$. **4.** $(-2, 5; -0, 5) \cup (2; 4)$.
5. $[-4; -3] \cup [-1; 1]$. **6.** 6 . **7.** $[-4; -2] \cup [2; 4]$. **8.** $[-5; -2] \cup [0; 4]$.

1.4. Функции.

1.4.1. Область определения функции.

1. $(-\infty; 0]$. 2. $(-5; 5)$. 3. $(-\infty; -1]$. 4. $(0; 9)$. 5. $[0; +\infty)$. 6. $(-13; 13)$.
7. $(-\infty; 0) \cup (0; 1)$. 8. $(3; +\infty)$. 9. $(2; 3)$. 10. $(-\infty; -1) \cup \left(-1; \frac{2}{3}\right)$. 11. $(-\infty; -11] \cup [11; +\infty)$.
12. $\left[\frac{e-5}{7}; +\infty\right)$. 13. $(-\infty; 10)$. 14. $(-\infty; 5, 5]$. 15. $x \neq \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z}$.
16. $(-1, 5; -1, 2) \cup (-1, 2; -1)$. 17. $[0, 75; 4)$. 18. $(-\infty; -3]$. 19. $[0, 01; +\infty)$. 20. $\left(-\frac{1}{6}; -\frac{1}{12}\right]$.
21. $(0; 3)$. 22. $(0; 5)$. 23. $(-1; 1)$. 24. $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}k, k \in \mathbb{Z}$. 25. $[-5; 4]$. 26. $[-3; 4]$. 27. $[-5; 5]$.
28. $[-4; 5]$.

1.4.2. Множество значений функции.

1. $[-1; 3]$. 2. $[1; 2]$. 3. $(2; +\infty)$. 4. $(-1; 2\pi - 1)$. 5. $(-\pi; \pi)$. 6. $(0; 4\pi)$. 7. $(0; 9)$. 8. $(-10; +\infty)$.
9. $(7; +\infty)$. 10. $[-1; 1]$. 11. $(-2; +\infty)$. 12. $[0; 1]$. 13. $(-3; -2]$. 14. $[1; \sqrt{3}]$. 15. $[7; 16, 9]$. 16. $[-3; +\infty)$.
17. $[0; +\infty)$. 18. $[-1; 3]$. 19. $[-3; 4]$. 20. $[-2; 4]$.

1.4.3. График функции.

1. 2. 2. 3. 3. 4. 4. 1. 5. 3. 6. 4. 7. $[-2; 4]$. 8. $(-6; 5)$. 9. 1. 10. 1. 11. 2.

1.4.4. Производная функции, наибольшее и наименьшее значение функции.

1. $y' = 7x^6 + 2\sin x$. 2. $2^x \ln 2 + 12x^2$. 3. $-xe^x - e^x - \frac{1}{x^2}$. 4. $3x^2 \ln x + x^2$.
5. $e^x \cos e^x - 27x^2$. 6. $y' = -2 \cos(2x - 5)$. 7. $y' = -\frac{1}{3} \sin\left(\frac{1}{3}x - 4\right)$.
8. $y' = -\frac{5}{7} \cos\left(\frac{5}{7}x - 2\right)$. 9. $y' = 3x^2 - 6 \cos 2x$. 10. $3e$. 11. $e \cdot (\sin 1 + \cos 1)$. 12. 0. 13. 0.
14. 5, 5. 15. $e^{e-1}(e+1)$. 16. -4. 17. $-\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$. 18. 0, 5. 19. $-\frac{2}{\pi^2}$. 20. -1. 21. 0. 22. 1. 23. $\frac{10}{3\sqrt{3}}$.
24. $\frac{e \cos e - \sin e}{e}$. 25. 2, 5. 26. $\frac{1}{\ln 3} + 4$. 27. $-\frac{1}{3}$. 28. 0. 29. $-59\frac{1}{6}$. 30. 6. 31. 9. 32. 16. 33. 19.
34. 56. 35. 26.

1.4.5. Преобразования функции.

1. $\frac{1}{2} \sin x + 1$. 2. $2 \operatorname{tg} x + 2$. 3. $-\frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2}$. 4. $\frac{1}{2} \ln x - 3e^x + 2$. 5. -16.
6. 16. 7. 0. 8. $-\frac{1}{x} - x - 2$. 9. $2\sqrt{x} + 2x - 12$. 10. $-\frac{2}{x^2} + 3x - 1$. 11. $t^3 - 3t^2 + 27$.

$$12. 3t^3 - 4t + 5. 13. 2t^3 - 5t^2 - 1.$$

§2. Геометрия.

2.1. Планиметрия.

2.1.1. Вписанная и описанная окружность, треугольник.

1. 1. 2. 48. 3. 14. 4. 6. 5. 1.

2.1.2. Вписанная и описанная окружность, n – угольник.

1. 8. 2. 64. 3. 6. 4. 0,75. 5. 16. 6. 20. 7. 21,25.

2.1.3. Треугольник.

1. 48. 2. 6. 3. 16. 4. 14. 5. 2. 6. 10. 7. 12. 8. 62,4. 9. 1,25. 10. 4,4.

2.1.4. Параллелограмм. Квадрат.

1. 1. 2. 20. 3. 6. 4. 7. 5. 6.

2.1.5. Трапеция.

1. 240. 2. 8. 3. 54. 4. 25. 5. 13. 6. 15. 7. 45. 8. 8. 9. 10. 10. 1,125.

2.1.6. Окружность, касательная, секущая.

1. 13. 2. 16. 3. 1,5. 4. 4. 5. 3,75. 6. 0,5. 7. 30. 8. 7. 9. 11. 10. 0,5.

2.2. Стереометрия.

2.2.1. Пирамида.

1. 36. 2. 9. 3. 75. 4. 1. 5. 2. 6. 3. 7. 45. 8. 48. 9. 21. 10. 32. 11. 2. 12. 4. 13. 93. 14. 4,8. 15. 160.

2.2.2. Призма. Параллелепипед.

1. 2. 2. 906. 3. 60°. 4. 7. 5. 1,6.

2.2.3. Конус.

1. 500.

2.2.4. Цилиндр.

1. 3,75.

Литература.

1. Башмаков М.И. Математика: учебник для 10 класса: среднее (полное) общее образование (базовый уровень) / М.И. Башмаков. – 3-е изд. – М.:Издательский центр «Академия», 2009.
2. Башмаков М.И. Математика: учебник для 11 класса: среднее (полное) общее образование (базовый уровень) / М.И. Башмаков. – 3-е изд. – М.:Издательский центр «Академия», 2009.
3. А.Н. Колмогоров и др. Алгебра и начала анализа. 10 -11 кл. – М., 2002
4. А.В.Погорелов Геометрия. 7- 11кл. – М., 1999
5. Геометрия, 10-11: учеб. Для образоват. Учреждений / Л.С Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – 13-е изд. М.: просвещение, 2004
6. Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа. 10=-11 кл.: Учеб. для общеобразоват. Учреждений. – М.: Мнемозина, 2000
7. Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа. 10=-11 кл.: Задачник для общеобразоват. Учреждений. – М.: Мнемозина, 2000
8. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И. Геометрия (базовый и профильный уровни). 10—11 кл. 2005.
9. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др. Геометрия (базовый и профильный уровни). 10-11. – М., 2005.
- 10.Колягин Ю.М., Ткачева М.В, Федерова Н.Е. и др. под ред. Жижченко А.Б. Алгебра и начала математического анализа (базовый и профильный уровни). 10 кл. – М., 2005.
- 11.Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н. и др. Алгебра и начала математического анализа (базовый и профильный уровни). 11 кл. – М., 2006.
- 12.Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н. и др. Алгебра и начала математического анализа (базовый и профильный уровни). 10 кл. – М., 2006.
- 13.Шарыгин И.Ф. Геометрия (базовый уровень) 10—11 кл. – 2005.

Интернет-ресурсы:

<http://www.math.ru>

Газета "Математика" издательского дома "Первое сентября"

<http://mat.1september.ru>

Математика в Открытом колледже

<http://www.mathematics.ru>

Математика: Консультационный центр преподавателей и выпускников МГУ

<http://school.msu.ru>

Материалы по математике в Единой коллекции цифровых образовательных ресурсов

http://school_collection.edu.ru/collection/matematika/

Московский центр непрерывного математического образования (МЦНМО)

<http://www.mccme.ru>

Образовательный математический сайт Exponenta.ru

<http://www.exponenta.ru>

Общероссийский математический портал Math_Net.Ru

<http://www.mathnet.ru>

Портал Allmath.ru – вся математика в одном месте

<http://math.ournet.md>

Вся элементарная математика: Средняя математическая интернет – школа

<http://www.bymath.net>

Геометрический портал

<http://www.neive.by.ru>

Графики функций

http://comp_science.narod.ru

Дискретная математика: алгоритмы (проект Computer Algorithm Tutor)

<http://www.uztest.ru>

Задачи по геометрии: информационно – поисковая система

http://www.math_on_line.com

Интернет-библиотека физико-математической литературы

<http://smekalka.pp.ru>

Математика онлайн: справочная информация в помощь студенту

<http://matematiku.ru>

Математика в помощь школьнику и студенту (тесты по математике онлайн)

<http://www.etudes.ru>

Материалы для математических кружков, факультативов, спецкурсов

<http://math.child.ru>